4.2.5 Kvadratické rovnice I

Předpoklady: 040204

Pedagogická poznámka: Hodinu je třeba řídit, tak, aby na poslední příklad zbylo minimálně 10 minut. Výsledky třetího příkladu se používají v příští hodině, proto je třeba, aby si příklad v nejhorším případě dodělali doma.

Pedagogická poznámka: Na začátku se mnozí tváří, že ze zadání příkladu 1 se nedá poznat, zda jsou rovnice kvadratické. Jedinou radou dlouho zůstává, aby si opsali tvar $ax^2+bx+c=0$ a pod něj zapsali co nejpodobněji zadanou rovnici.

Př. 1: Jako kvadratické označujeme rovnice, které je možné pomocí ekvivalentních úprav převést na tvar $ax^2+bx+c=0$, kde x je proměnná a a, b, c jsou reálná čísla, pro která platí $a \neq 0$. Které z následujících rovnic patří mezi kvadratické? Pokud je rovnice kvadratická, vypiš hodnoty koeficientů a, b, c.
a) $5x^2+11x+4=0$ b) $3x^2+x+\sqrt{2}=0$ c) $4x^2+6x+10=3$

Koeficienty a, b, c – místa, kde v konkrétní rovnici nebudou písmena, ale konkrétní čísla.

a) $\begin{matrix} ax^2+bx\ +c=0 \\ 5x^2+11x+4=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ rovnice je kvadratická, platí $a=5$, $b=11$, $c=4$.

b) $\begin{matrix} ax^2+\ bx+\ c=0 \\ 3x^2+1\cdot x+\sqrt{2}=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ rovnice je kvadratická, platí $a=3$, $b=1$, $c=\sqrt{2}$.

c) $4x^2+6x+10=3$ na pravé straně není nula $\Rightarrow$ rovnici musíme upravit.

$4x^2+6x+10=3 \quad /-3$

$4x^2+6x+7=0$

$\begin{matrix} ax^2+bx+c=0 \\ 4x^2+6x+7=0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ rovnice je kvadratická, platí $a=4$, $b=6$, $c=7$.

Pedagogická poznámka: S kontrolou bodu a) příliš nečekám (zapíšu do třídnice a jednou obejdu třídu). Stejně tak se snažím nezdržovat s bodem c). U žáků, kteří nejsou vůbec schopni s příkladem hnout, je třeba zkontrolovat (a případně zopakovat), zda vůbec chápou princip proměnné jako žolíku, za který se mohou dosazovat různá čísla a koeficientu jako poloproměnné, jejíž hodnota se liší u různých rovnic (a právě tyto různé hodnoty odlišují různé rovnice od sebe), ale u jedné rovnice je pořád stejná. Poté, co si řekneme úvodní větu řešení, ještě chvíli čekám.

Pedagogická poznámka: Následující příklad zadávám slovně na konci kontroly předchozího. Snažím se vysvětlit, že právě takové přemýšlení dopředu, domýšlení dalších variant, na které se mě ještě nikdo nestihl zeptat, je znakem lidí, kteří se matematiku (ale i cokoliv jiného) mohou naučit opravdu dobře.

Př. 2: Zamysli se nad předchozím příkladem. Jaké problémy se dají očekávat v dalším příkladu se stejným úkolem a dalšími rovnicemi?

V dalším příkladu určitě budou rovnice, které nejsou kvadratické (asi bez x^2 nebo s něčím, co nevyhovuje definici - x^3?).
Je zajímavé, že se v hodnotách koeficientů neobjevila žádná záporná čísla ani nula – jak by se podobná hodnota koeficientů projevila?

Proč tolik záleží, aby na pravé straně rovnice byla nula?
Srovnáme dvě rovnice:

- $4x^2+6x+10=3$,
- $4x^2+6x+10=0$.

Nejsou stejné, ale pokud by nezáleželo na pravé straně a zároveň bychom je měli popsat pomocí koeficientů *a*, *b*, *c*, získali bychom stejná čísla $a=4$, $b=6$, $c=10$ $\Rightarrow$ rovnice by se zdály stejné, což je chyba $\Rightarrow$ dvě možnosti řešení tohoto problému:

- zavedení nového koeficientu *d* pro čísla bez *x* na pravé straně,
- trvání na tom, aby pravá strana byla nulová.

Protože matematici mají raději co nejmenší počet koeficientů a co nejjednoznačnější výsledky, rozhodli se pro řešení s pravou stranou rovnou nule (koeficient *d* by totiž nestačil, musely by se zavést další, navíc shodné rovnice by nemusely mít stejné koeficienty, …).

Pedagogická poznámka: Očekávatelné problémy následujícího příkladu:
bod b) první záporný koeficient,
bod d) třetí mocnina v případě, že žáci začnou do koeficientu dosazovat i proměnou, vyjde jim $a=2x, b=-x, c=2$,
bod e) první nulový koeficient.
Příklad kontrolujeme nadvakrát do bodu c) a pak nechávám chvíli na opětovnou kontrolu zbytku příkladu (v kontrole určitě zazní, že chybějící x^2 je důsledek nulového koeficientu *a*).

Př. 3: Které z následujících rovnic patří mezi kvadratické? Pokud je rovnice kvadratická, vypiš hodnoty koeficientů *a*, *b*, *c*.

a) $2x^2+5x+7=0$ b) $x^2-2x+1=0$ c) $6x-3=0$
d) $2x^3-x^2+2=0$ e) $x^2-4=0$ f) $-x^2-x\sqrt{3}=0$

a) $2x^2+5x+7=0$
Kvadratická rovnice: $a=2; b=5; c=7$.

b) $x^2-2x+1=0$
Kvadratická rovnice: $a=1; b=-2; c=1$.

c) $6x-3=0$
Nejde o kvadratickou rovnici: neobsahuje člen s x^2 (pro koeficient *a* před členem x^2 platí $a=0$).

d) $2x^3 - x^2 + 2 = 0$
Nejde o kvadratickou rovnici: rovnice obsahuje člen s x^3.

e) $x^2 - 4 = 0$
Kvadratická rovnice: $a = 1; b = 0; c = -4$.

f) $-x^2 - x\sqrt{3} = 0$
Kvadratická rovnice: $a = -1; b = -\sqrt{3}; c = 0$.

Př. 4: Které z následujících rovnic patří mezi kvadratické? Pokud je rovnice kvadratická, vypiš hodnoty koeficientů *a*, *b*, *c*.

a) $x^2 - 4x + 2 = 3x + 5$ b) $2x^2 - 1 = 2(x^2 - 2x)$ c) $x^2 + 2 = (x-3)^2$

d) $x^3 + 2x^2 = 2(x^2 + 1) + 3x$ e) $3x^2 = 4x$ f) $3x - x^2 + 5 = 0$

g) $\frac{2}{3}x^2 - x\sqrt{2} + x - 3 = 0$ h) $\left(2x - \sqrt{2}\right)^2 = \left(x\sqrt{3} + 1\right)^2$

a) $x^2 - 4x + 2 = 3x + 5 \quad / -3x$
$x^2 - 7x + 2 = 5 \quad / -5$
$x^2 - 7x - 3 = 0$
Kvadratická rovnice: $a = 1; b = -7; c = -3$.

b) $2x^2 - 1 = 2(x^2 - 2x)$
$2x^2 - 1 = 2x^2 - 4x \quad / -2x^2 + 4x$
$4x - 1 = 0$
Nejde o kvadratickou rovnici: neobsahuje člen s x^2 (pro koeficient *a* před členem x^2 platí $a = 0$).

c) $x^2 + 2 = (x-3)^2$
$x^2 + 2 = x^2 - 6x + 9 \quad / -x^2$
$2 = -6x + 9 \quad / +6x - 9$
$6x - 7 = 0$
Není to kvadratická rovnice, protože $a = 0$.

d) $x^3 + 2x^2 = 2(x^2 + 1) + 3x$
$x^3 + 2x^2 = 2x^2 + 2 + 3x \quad / -2x^2$
$x^3 = 3x + 2 \quad / -3x - 2$
$x^3 - 3x - 2 = 0$
Není to kvadratická rovnice, protože $a = 0$ a navíc obsahuje i vyšší mocninu neznámé.

e) $3x^2 = 4x \quad / -4x$
$3x^2 - 4x = 0$

Kvadratická rovnice: $a = 3; b = -4; c = 0$.

f) $3x - x^2 + 5 = 0$
$-x^2 + 3x + 5 = 0$
Kvadratická rovnice: $a = -1; b = 3; c = 5$.

g) $\frac{2}{3}x^2 - x\sqrt{2} + x - 3 = 0$
$\frac{2}{3}x^2 + x\left(1-\sqrt{2}\right) - 3 = 0$
Kvadratická rovnice: $a = \frac{2}{3}; b = 1-\sqrt{2}; c = -3$.

h) $\left(2x-\sqrt{2}\right)^2 = \left(x\sqrt{3}+1\right)^2$
$4x^2 - 4x\sqrt{2} + 2 = 3x^2 + 2x\sqrt{3} + 1 \qquad / -3x^2 - 1$
$x^2 - 4x\sqrt{2} + 1 = 2x\sqrt{3} \qquad / -2x\sqrt{3}$
$x^2 - 4x\sqrt{2} - 2x\sqrt{3} + 1 = 0$
$x^2 + x\left(-4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right) + 1 = 0$
Kvadratická rovnice: $a = 1; b = -4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}; c = 1$.

Některé kvadratické rovnice již řešit umíme.

Př. 5: Vyřeš kvadratické rovnice.
a) $x^2 - 16 = 0$ b) $x^2 - 5x = 0$ c) $x^2 - 3x + 2 = 0$
d) $x^2 + 4 = 0$ e) $3x^2 + 4x = 0$ f) $x^2 - 6x + 9 = 0$

a) $x^2 - 16 = (x-4)(x+4) = 0 \qquad K = \{-4; 4\}$

b) $x^2 - 5x = x(x-5) = 0 \qquad K = \{0; 5\}$

c) $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) = 0 \qquad K = \{1; 2\}$

d) $x^2 + 4 = 0$, nejde rozložit, neexistuje žádné reálné číslo, které po umocnění na druhou dá -4
$\Rightarrow K = \emptyset$

e) $3x^2 + 4x = x(3x+4) = 0 \qquad K = \left\{-\frac{4}{3}; 0\right\}$

f) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0 \qquad K = \{3\}$

Pedagogická poznámka: Pokud s příkladem začínáte zmiňovaných 10 minut před zvoněním, je třeba ukázat řešení bodu poměrně brzo, aby i ti, které řešení nenapadne, mohli pokračovat dál. Během řešení je možné připomenout, že jde vlastně o spojení dvou dovedností probraných dříve: rozkladu na součin a řešení rovnic v součinovém tvaru – tedy vlastně nic nového.

Shrnutí: Jako kvadratickou označujeme každou rovnici, která se dá zapsat ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c jsou reálná čísla, pro která platí $a \neq 0$.